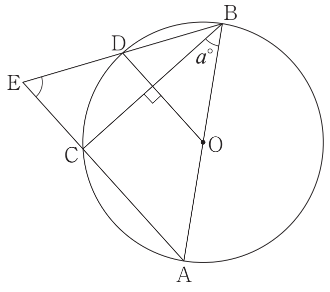
第 20 講　円・円周角

Step 1

1 右の図で，線分 AB は円 O の直径で，2 点 C，D は円 O の周上にあり，BC ⊥ OD である。また，点 E は 2 直線 AC，BD の交点である。∠OBC = a°のとき，∠CED の大きさを a を用いて表せ。



【奈良県】

2 図 1 のように，地中に半分以上埋まっている丸太がある。図 2 のように，この丸太の切り口は円であり，地上に出ている部分を測ると，高さが 9 cm，弦の長さが 42cm であった。

このとき，この丸太の切り口の半径を求めなさい。

ただし，丸太の切り口は地面と垂直であるものとする。

図 1

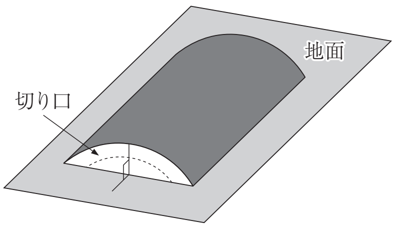
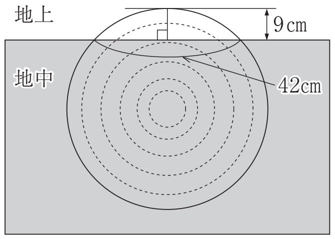
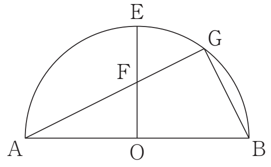


図 2



【千葉県】

3 右の図のように，線分 AB を直径とする半円があり，線分 AB の中点を点 O とします。点 O を通り線分 AB に垂直な直線と弧 AB との交点を E とし，線分 OE の中点を F とします。点 A，F を通る直線と弧 AB との交点のうち，点 A と異なる点を G とします。△AOF の面積が 10cm^2 のとき，△AGB の面積を求めなさい。



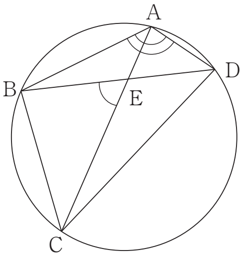
【北海道】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step 2

4 図のように，円周上の 4 点 A，B，C，D を頂点とする四角形 ABCD があり，E は線分 AC と BD との交点である。

AB = BC，円の半径が 2 cm のとき，次の①，②の問いに答えなさい。



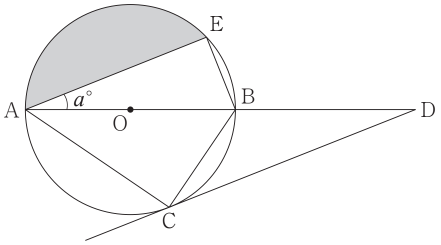
① ∠BEC = a° のとき，∠BAD の大きさは何度か，a を使って表しなさい。

② ∠BEC = 60° のとき，線分 BD の長さは何 cm か，求めなさい。

【愛知県】

5 右の図のように，AB を直径とする円 O の周上に，AC ＞ BC となるように点 C をとる。また，C を通る円 O の接線と直線 AB との交点を D とし，CD ∥ AE となるように円周上に点 E をとる。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。



(1) ∠EAB = a° とするとき，∠BAC の大きさを a を用いて表しなさい。

(2) 円 O の半径が 2 cm，∠EBA = 60° のとき，C を含まない方の弧 AE と線分 AE とで囲まれた部分の面積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

【栃木県】

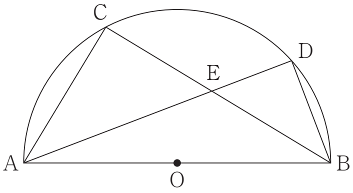
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　3

6　右の図のように，線分 AB を直径とする半円があり，点 O は線分 AB の中点である。$\overset{\frown}{AB}$上に点 C，D をこの順にとり，線分 AD と BC との交点を E とする。

AB ＝ 10cm として，次の問いに答えなさい。

ただし，円周率は π とする。



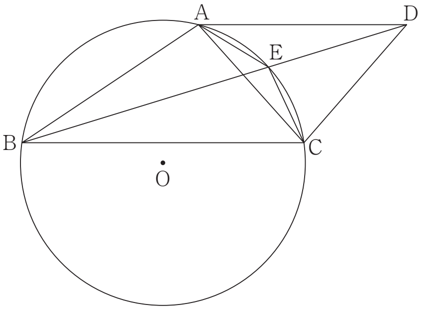
(1)　$\overset{\frown}{CD} = 2\pi$cm のとき，∠AEC の大きさを求めなさい。

(2)　∠AEC ＝ $a°$ のとき，$\overset{\frown}{AC}$と$\overset{\frown}{BD}$の長さの和を a を使った式で表しなさい。

【富山県】

7　右の図のように，円 O の周上に 3 点 A，B，C があり，AB ＝ 6 cm，BC ＝ 8 cm である。点 A を通り直線 BC に平行な直線と，∠ABC の二等分線との交点を D とすると，点 D は円 O の外部にあり，四角形 ABCD の面積は $7\sqrt{11}\text{cm}^2$ である。また，線分 BD と円 O との交点のうち B でないものを E とする。

このとき，次の問い(1)〜(3)に答えよ。



(1)　線分 AD の長さを求めよ。また，直線 BC 上に BC ⊥ AH となるように点 H をとるとき，線分 AH の長さを求めよ。

(2)　線分 BD の長さを求めよ。

(3)　△ABD と△EAC の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

【京都府】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

〈 ***Note*** 〉

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

第20講　円・円周角

Step 1

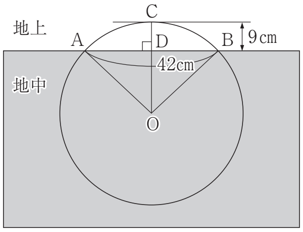
1　$45^\circ + \dfrac{a^\circ}{2}$

≪解説≫

線分 BC，OD の交点を F とする。線分 AB は円 O の直径で，$\angle ACB = 90^\circ$ なので，$\angle OFB = \angle ACB = 90^\circ$ より，AE $/\!/$ OD　よって，同位角は等しいから，$\angle CED = \angle ODB$ ここで，$\triangle OBF$ において，$\angle BOF = 180^\circ - 90^\circ - a^\circ = 90^\circ - a^\circ$　また，OB = OD より，$\triangle OBD$ は二等辺三角形だから，$\angle CED = \angle ODB = \{180^\circ - (90^\circ - a^\circ)\} \div 2 = 45^\circ + \dfrac{a^\circ}{2}$

2　29 (cm)

≪解説≫



右図のように，この丸太の切り口の円の中心を O とし，弦を AB，地上に出ている部分の高さを CD とすると，$\triangle OAB$ は二等辺三角形なので，$AD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \times 42 = 21$ (cm) また，$\triangle OAD$ は直角三角形で，OA = x cm とすると，OD = $(x - 9)$ cm になるので，三平方の定理より，$x^2 = (x - 9)^2 + 21^2$ が成り立つ。$x^2 = x^2 - 18x + 81 + 441$ より，$18x = 522$　よって，$x = 29$ より，丸太の切り口の半径は 29cm。

3　32 (cm^2)

≪解説≫

$\triangle AOF$ と $\triangle AGB$ において，共通な角より，$\angle OAF = \angle GAB$　また，条件より，$\angle AOF = 90^\circ$ で，AB は直径だから，$\angle AGB = 90^\circ$ なので，$\angle AOF = \angle AGB$　これより，$\triangle AOF \backsim \triangle AGB$　ここで，OF = FE = r cm とすると，OA = OB = OE = $2r$ cm　さらに，$AF = \sqrt{OA^2 + OF^2} = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = \sqrt{5}r$ (cm)　よって，$\triangle AOF$ と $\triangle AGB$ の相似比は，$AF : AB = \sqrt{5}r : 4r = \sqrt{5} : 4$ だから，面積比は，$(\sqrt{5})^2 : 4^2 = 5 : 16$ となり，$\triangle AGB = 10 \times \dfrac{16}{5} = 32$ (cm^2)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Step 2

4　① $180 - a$（度）　② $2\sqrt{3}$（cm）

≪解説≫

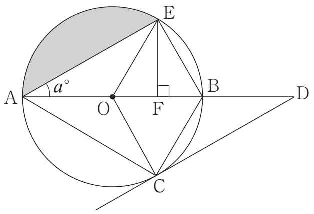
① △ABCは，AB = BCの二等辺三角形だから，∠BAC = ∠BCA　また，$\overset{\frown}{CD}$の円周角だから，∠CAD = ∠CBD　よって，∠BAD = ∠BAC + ∠CAD = ∠BCA + ∠CBD　△BCEの内角の和より，∠BCA + ∠CBD = 180° − a°だから，∠BAD = 180° − a°

② 円の中心をOとし，OとB，OとDをそれぞれ結ぶ。∠BEC = 60°のとき，∠BAD = 180° − 60° = 120°　よって，$\overset{\frown}{BCD}$の中心角は，120° × 2 = 240°だから，∠BOD = 360° − 240° = 120°　これより，△BODは，OB = OD = 2cm，∠BOD = 120°の二等辺三角形である。OからBDに垂線OHを引くと，△BOH ≡△DOHとなるから，△BOHは30°，60°の角をもつ直角三角形である。したがって，BH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$OB = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$（cm）より，BD = 2BH = $2\sqrt{3}$（cm）

5　(1) $45 - \frac{a}{2}$（度）　(2) $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$（cm²）

≪解説≫

(1) 右図のように点Oと点Cを結ぶと，∠OCD = 90°　また，CD ∥ AEより，∠ODC = ∠EAB = a°　△OCDの内角の和より，∠DOC = 180° − 90° − a° = 90° − a°だから，円周角の定理より，∠BAC = $\frac{1}{2}$∠DOC = $45° - \frac{a°}{2}$



(2) ∠EBA = 60°のとき，△OBEは1辺が2cmの正三角形なので，上図のようにEからOBに垂線EFをひくと，EF = $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$（cm）　これより，△AOE = $\frac{1}{2}$ × OA × EF = $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$（cm²）　∠AOE = 180° − 60° = 120°より，おうぎ形OAE = $\pi \times 2^2 \times \frac{120}{360} = \frac{4}{3}\pi$（cm²）なので，求める面積は，$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$（cm²）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　3

6　(1) 54（度）　(2) $\dfrac{1}{18}\pi a$（cm）

≪解説≫

(1) $\overset{\frown}{AB} = 10\pi \times \dfrac{1}{2} = 5\pi$（cm）より，$\overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{AB} = 2\pi : 5\pi = 2 : 5$　これより，$\overset{\frown}{CD}$に対する中心角は，$180° \times \dfrac{2}{5} = 72°$で，$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は，$72° \times \dfrac{1}{2} = 36°$だから，$\angle CAE = 36°$　また，線分ABは直径だから，$\angle ACE = 90°$　よって，△ACEにおいて，$\angle AEC = 180° - (90° + 36°) = 54°$

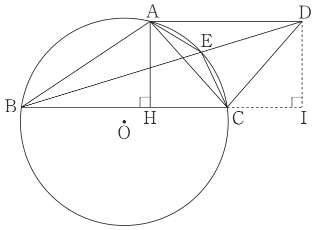
(2) △AEBの内角と外角の関係より，$\angle EBA + \angle EAB = \angle AEC = a°$　つまり，$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角と$\overset{\frown}{BD}$に対する円周角の和が$a°$となるから，$\overset{\frown}{AC}$に対する中心角と$\overset{\frown}{BD}$に対する中心角の和は，$2a°$。よって，$\overset{\frown}{AC}$と$\overset{\frown}{BD}$の長さの和は，$5\pi \times \dfrac{2a}{180} = \dfrac{1}{18}\pi a$（cm）

7　(1)（AD ＝）6（cm）　（AH ＝）$\sqrt{11}$（cm）　(2) $2\sqrt{33}$（cm）
(3)（△ABD：△EAC ＝）33：5

≪解説≫

(1) BDは∠ABCの二等分線だから，$\angle ABD = \angle CBD$　AD∥BCより，$\angle ADB = \angle CBD$　よって，$\angle ABD = \angle ADB$となり，△ABDは二等辺三角形だから，AD ＝ AB ＝ 6 cm　また，台形ABCDの面積について，$\dfrac{1}{2} \times (6 + 8) \times AH = 7\sqrt{11}$が成り立つから，これを解いて，$AH = \sqrt{11}$（cm）

(2) 右図のように点DからBCの延長線上に垂線DIを下ろすと，HI ＝ AD ＝ 6 cm, $DI = AH = \sqrt{11}$cm　また，△ABHで三平方の定理より，$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - (\sqrt{11})^2} = 5$（cm）　よって，BI ＝ BH ＋ HI ＝ 5 ＋ 6 ＝ 11（cm）だから，△DBIで，$BD = \sqrt{BI^2 + DI^2} = \sqrt{11^2 + (\sqrt{11})^2} = 2\sqrt{33}$（cm）



(3) $\overset{\frown}{AE}$に対する円周角より，$\angle ACE = \angle ABD$，$\overset{\frown}{CE}$に対する円周角より，$\angle CAE = \angle CBD$で，仮定より，$\angle ABD = \angle CBD$だから，$\angle ACE = \angle CAE$　これより，△EACは△ABDと相似な二等辺三角形とわかる。HC ＝ BC － BH ＝ 8 － 5 ＝ 3（cm）より，△ACHで，$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{(\sqrt{11})^2 + 3^2} = 2\sqrt{5}$（cm）　よって，△ABDと△EACの相似比は，$BD : AC = 2\sqrt{33} : 2\sqrt{5} = \sqrt{33} : \sqrt{5}$となるから，求める面積比は，$(\sqrt{33})^2 : (\sqrt{5})^2 = 33 : 5$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。